Musterlösung 4

1. a) Wir begründen zunächst, dass X tatsächlich eine Zufallsvariable ist. Hierzu müssen wir nachweisen, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}.$$

Da aber $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ gilt, ist dies immer erfüllt, also ist X tatsächlich eine Zufallsvariable.

Als Nächstes berechnen wir die Verteilungsfunktion F_X von X: Offensichtlich ist für $x < 0$

$$F_X(x) = P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) = |\omega_1 - \omega_2| < x\}] = 0,$$

da $|u| \geq 0$ für jede reelle Zahl u gilt.

Sei nun $x \geq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) = |\omega_1 - \omega_2| \leq x\}] \\
&= P[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| \leq \lfloor x \rfloor\}] \\
&= \sum_{n=0}^{\lfloor x \rfloor} P[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = n\}]
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $|\omega_1 - \omega_2|$ für $\omega \in \Omega$ nur ganzzahlige Werte annehmen kann, sowie die Notation

$$\lfloor x \rfloor := \max\{\ell \in \mathbb{Z} : \ell \leq x\}$$

für die Abrundungsfunktion. Jetzt berechnen wir:

$$P[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = 0\}] = P[\{(1,1), ..., (6,6)\}] = \frac{6}{36}$$

$$P[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = 1\}] = P[\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2), ..., (5,6),(6,5)\}] = \frac{10}{36}$$

$$P[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = 2\}] = P[\{(1,3),(3,1),(2,4),(4,2), ..., (4,6),(6,4)\}] = \frac{8}{36}$$

$$P[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = 3\}] = P[\{(1,4),(4,1),(2,5),(5,2),(3,6),(6,3)\}] = \frac{6}{36}$$

$$P[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = 4\}] = P[\{(1,5),(5,1),(2,6),(6,2)\}] = \frac{4}{36}$$

$$P[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = 5\}] = P[\{(1,6),(6,1)\}] = \frac{2}{36}$$

Bitte wenden!

Damit können wir nun die Verteilungsfunktion explizit bestimmen:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{6}{36}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{6}{36} + \frac{10}{36}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36}, & 2 \le x < 3 \\ \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} + \frac{6}{36}, & 3 \le x < 4 \\ \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36}, & 4 \le x < 5 \\ 1, & x \ge 5 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{6}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{4}{9}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{2}{3}, & 2 \le x < 3 \\ \frac{5}{6}, & 3 \le x < 4 \\ \frac{17}{18}, & 4 \le x < 5 \\ 1, & x \ge 5 \end{cases}$$

b) Wir beweisen zunächst wieder, dass Y eine Zufallsvariable ist. Dazu müssen wir wieder überprüfen, dass $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \le a\} \in \mathcal{F},$$

wobei $\mathcal{F}$ die Borel-σ-Algebra auf $\Omega = [0,1]^2$ ist. Zunächst sehen wir, dass für $a < 0$ gilt:

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \le a\} = \{\omega \in [0,1]^2 : 2\omega_1 + 2\omega_2 \le a\} = \emptyset \in \mathcal{F}$$

da jede σ-Algebra die leere Menge enthält (Proposition 1.5, *i*). Analog ist auch für $a \ge 4$:

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \le a\} = \{\omega \in [0,1]^2 : 2\omega_1 + 2\omega_2 \le a\} = \Omega \in \mathcal{F}$$

Sei also $a \in [0,4)$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega : Y(\omega) > a\} &= \{\omega \in [0,1]^2 : 2\omega_1 + 2\omega_2 > a\} \\ &= \{\omega \in [0,1]^2 : 0 \le \omega_1 \le 1, \tfrac{a}{2} - \omega_1 < \omega_2 \le 1, \omega_2 \ge 0\} \\ &\overset{(*)}{=} \left(\bigcup_{x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} [x,1] \times (\tfrac{a}{2} - x, 1] \right) \cap \mathbb{R} \times [0,\infty) \\ &= \bigcup_{x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{[x,1] \times [\max\{\tfrac{a}{2} - x + \tfrac{1}{n}, 0\}, 1]}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

denn $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ist abzählbar und abzählbare Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{F}$ liegen wieder in $\mathcal{F}$ (Definition 1.2, H3).

In $(*)$ haben wir verwendet, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, das bedeutet, falls für $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ gilt, dass $0 \le \omega_1 \le 1$ und $\frac{a}{2} - \omega_1 < \omega_2 \le 1$, dann finden wir ein $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ sodass:

$$\omega_1 \ge x, \qquad \omega_2 > \frac{a}{2} - x.$$

Siehe nächstes Blatt!

In der Tat finden wir so ein x, indem wir eine Folge $x_n \uparrow \omega_1$ wählen mit $x_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ und bemerken, dass wegen $\omega_2 > \frac{a}{2} - \omega_1$ auch gilt, dass $\omega_2 > \frac{a}{2} - x_n$ für $n \geq N$ und wir können $x := x_N$ setzen.

Da aber $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra ist, liegt mit $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) > a\}$ auch $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq a\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) > a\}^c \in \mathcal{F}$.

Wir berechnen nun die Verteilungsfunktion F_Y von Y. Wie wir bereits oben gesehen haben, gilt:

$$F_Y(y) = P[\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}] = P[\emptyset] = 0, \qquad y < 0$$

sowie

$$F_Y(y) = P[\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}] = P[\Omega] = 1, \qquad y \geq 4.$$

Sei zunächst $y \in [0,2)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P[\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}] \\ &= P[\{\omega \in \Omega : 2\omega_1 + 2\omega_2 \leq y\}] \\ &= \text{Area}(\{\omega \in \Omega : 2\omega_1 + 2\omega_2 \leq y\}) \end{aligned}$$

Man erkennt leicht, dass diese Fläche gerade das (abgeschlossene) Dreieck begrenzt durch die Punkte $(0,0), (0, \frac{y}{2})$ und $(\frac{y}{2}, 0)$ ist, welches eine Fläche von $\frac{y^2}{8}$ besitzt (in der Tat, $2\omega_1 + 2\omega_2 \leq y \Leftrightarrow (\omega_1 \in [0, \frac{y}{2}]$ und $\omega_2 \in [0, \frac{y}{2} - \omega_1]))$.

Für $y \in [2,4)$ berechnen wir stattdessen

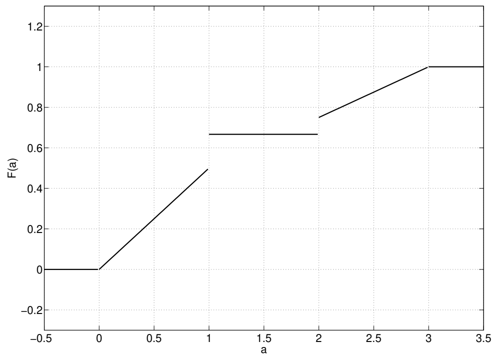
$$\begin{aligned} 1 - F_Y(y) &= P[\{\omega \in \Omega : Y(\omega) > y\}] \\ &= \text{Area}(\{\omega \in \Omega : 2\omega_1 + 2\omega_2 > y\}) = \tfrac{1}{2}(2 - \tfrac{y}{2})^2, \end{aligned}$$

da die Fläche hier gegeben ist als das (offene) Dreieck begrenzt durch die Punkte $(1,1), (\frac{y}{2} - 1, 1)$ und $(1, \frac{y}{2} - 1)$. Damit gilt $F_Y(y) = 1 - \frac{1}{2}(2 - \frac{y}{2})^2 = y - \frac{y^2}{8} - 1$. Damit erhalten wir schliesslich die Verteilungsfunktion:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{y^2}{8}, & 0 \leq y < 2 \\ y - \frac{y^2}{8} - 1, & 2 \leq y < 4 \\ 1, & y \geq 4. \end{cases}$$

2. **a)** Der Graph von F verläuft folgendermassen:

Bitte wenden!



b) $P[\{X < 1\}] = F(1^-) = 1/2$
$P[\{X = 2\}] = F(2) - F(2^-) = 3/4 - 2/3 = 1/12$
$P[\{X = 3\}] = 0$ (da F stetig im Punkt 3)
$P[\{1 < X \leq 2\}] = F(2) - F(1) = 3/4 - 2/3 = 1/12$
$P[\{1 \leq X < 2\}] = F(2^-) - F(1^-) = 2/3 - 1/2 = 1/6$
$P[\{X \geq 3/2\}] = 1 - F(1.5^-) = 1 - 2/3 = 1/3.$

3. **a)** Da es sich um eine faire Münze handelt, verwenden wir ein Laplace Modell mit $\Omega = \{\text{“Kopf”}, \text{“Zahl”}\}^5$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und alle Elementarereignisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit $1/2^5 = 1/32$. Wir berechnen $P(X = i)$, für $i = 0, \ldots, 5$. Da wir ein Laplace Modell voraussetzen, müssen wir alle Elementarereignisse zählen, bei denen genau i-mal “Kopf” erscheint. Wir erhalten $\binom{5}{i}$ und somit $P(X = i) = \binom{5}{i}/32$. Als Verteilungsfunktion erhalten wir

$$F_X(x) = \sum_{i \leq x;\, 0 \leq i \leq 5} \frac{\binom{5}{i}}{32} = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1/32 & \text{falls } 0 \leq x < 1, \\ 3/16 & \text{falls } 1 \leq x < 2, \\ 1/2 & \text{falls } 2 \leq x < 3, \\ 13/16 & \text{falls } 3 \leq x < 4, \\ 31/32 & \text{falls } 4 \leq x < 5, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Wir bemerken, dass der totale Geldbetrag Y nach dem Spiel nur von der Anzahl erschienenen “Köpfe” abhängt. Es gilt nämlich $Y = f(X) = (1.1)^X \times (0.9)^{5-X}$. Da f wachsend ist, erhalten wir folgende Verteilungsfunktion von Y:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } y < 0.9^5, \\ 1/32 & \text{falls } 0.9^5 \leq y < 1.1 \times 0.9^4, \\ 3/16 & \text{falls } 1.1 \times 0.9^4 \leq y < 1.1^2 \times 0.9^3, \\ 1/2 & \text{falls } 1.1^2 \times 0.9^3 \leq y < 1.1^3 \times 0.9^2, \\ 13/16 & \text{falls } 1.1^3 \times 0.9^2 \leq y < 1.1^4 \times 0.9^1, \\ 31/32 & \text{falls } 1.1^4 \times 0.9^1 \leq y < 1.1^5, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$